# VI номер

1. Еще раз определение скалярного произведения в пространстве геометрических векторов.  
     
   Скалярным произведением двух векторов называется число, равное произведению их длин на косинус угла между ними.
2. Что такое билинейная форма?  
     
   Билинейная форма – это функция из где выполняется

Иными словами, билинейная форма представляет собой числовую функцию двух векторных аргументов и ,определенную на на всевозможных векторах вещественного линейного пространства Lи линейную по каждому из этих аргументов.  
  
Например, скалярное произведение является билинейным функционалом.

1. Что такое симметричная билинейная форма?  
     
   Билинейная форма симметрична, если
2. Что такое матрица билинейной формы в фиксированном базисе?  
     
   Тут аналогично матрице квадратичной формы(вообще правильней было бы сначала показать ее, но кто я такой, чтобы спорить с гением?)  
     
   где
3. Что такое квадратичная форма, соответствующая данной билинейной форме?  
     
   Иными словами, это как билинейная форма, но один и тот же аргумент мы используем на обоих “местах” – получается квадрат.  
     
   Квадратичную форму еще также можно определить как однородный многочлен второй степени от n переменных с действительными коэффициентами  
     
   Квадратичную форму можно записать в матричном виде:  
   где - столбец, составленный из переменных; - симметрическая матрица порядка n, называемая матрицей квадратичной формы.  
     
     
     
   Пример  
   Матрица:  
   т.е.
4. Что такое положительно (отрицательно) определенная квадратичная форма? Какая функция является знакопостоянной? Знакоопределенной?  
   Знакопеременной?   
     
   Знакоопределенная функция – это функция, которая принимает только положительные(отрицательные) значения на всем промежутке. Такую функцию мы можем называть положительно(или отрицательно) определенной.  
     
   Знакопостоянная функция – функция, которая на промежутке положительных чисел принимает только положительные или отрицательные значения (то есть что-то одно, а не все сразу), а на промежутке отрицательных – противоположное значение (если на положительном промежутке положительные значения – значит принимает на отрицательном промежутке – отрицательные значения. И наоборот – положительный промежуток – отрицательные значения. Отрицательный промежуток – положительные значения)  
     
     
   Знакопеременная – функция, не являющаяся ни знакопостоянной или знакоопределенной (т. е. знак значений не зависит от промежутка, но при этом меняется)
5. Сформулируйте Критерий Сильвестра для разных определенностей.  
     
   Для положительной определённости квадратичной формы необходимо и достаточно, чтобы угловые миноры её матрицы были положительны.  
     
   Для отрицательной определённости квадратичной формы необходимо и достаточно, чтобы угловые миноры чётного порядка её матрицы были положительны, а нечётного порядка — отрицательны.  
     
     
   Доказательство:  
     
   1. Необходимость: Имеется положительно определённая квадратичная форма. j-ый диагональный элемент положителен, так как k(x)>0 в том числе и для вектора со всеми нулевыми координатами, кроме j-ой. При приведении матрицы к каноническому виду не будет нужно переставлять строки, и знаки главных миноров матрицы не изменятся. А в каноническом виде диагональные элементы положительны, и миноры положительны; следовательно, (так как их знак не менялся при преобразованиях), у положительно определённой квадратичной формы в любом базисе главные миноры матрицы положительны.

2. Достаточность: имеется положительность миноров. Первый минор определяет знак первого диагонального элемента в каноническом виде. Знак отношения определяет знак i+1-го элемента в диагональном виде. Так получим, что в каноническом виде все элементы на диагонали положительные, то есть квадратичная форма определена положительно………………….

1. Как записать билинейную форму в координатной и матричной форме?  
     
    – координатная запись  
   - векторная запись
2. Как меняется матрица билинейной формы при замене базиса? Докажите эту формулу.  
     
   Формула на самом деле знакомая). Я бы сказал, гениальная.  
     
   Доказательство:
3. Как записать квадратичную форму в координатной и матричной форме?  
     
   Смотреть пункт 8.
4. Восстановите квадратичную форму по ее матрице.  
     
   Матрица квадратичной формы должна быть симметрической ()  
     
   ииии дальше все просто  
     
   – сначала смотрим на главную диагональ и записываем слагаемые с квадратами переменных;

– затем анализируем симметричные элементы 1-й строки (или 1-го столбца), и записываем все слагаемые, в которые входит 1-я переменная (не забывая удвоить коэффициенты);

– далее смотрим на оставшиеся симметричные элементы 2-й строки (справа от диагонали) либо 2-го столбца (ниже диагонали) и записываем соответствующие парные произведения (с удвоенными коэффициентами!).

– и, наконец, анализируем правую нижнюю пару симметричных чисел.  
  
Для удобства можно записывать матрицу так:

1. Дайте определение евклидова пространства.  
     
   Евклидово пространство – это линейное пространство, в котором зафиксирована билинейная симметричная положительно определенная форма, которая называется(евклидовым) скалярным произведением.
2. Что такое матрица Грама (с одним м)?  
     
   Было бы 2 м, было бы интереснее…  
     
   Матрица Грама – квадратная матрица, составленная из скалярных произведений системы векторов базиса.
3. Что такое длина вектора в евклидовом пространстве?  
     
   Длиной вектора в евклидовом пространстве называется корень квадратный из его скалярного квадрата
4. Сформулируйте (и докажите) неравенство Коши-Буняковского.  
     
   а)Причем неравенство обращается в равенство тогда и только тогда, когда векторы коллинеарны.  
     
   Доказательство:  
   а)Пусть векторы коллинеарны, скажем,   
   б)Пусть векторы неколлинеарны, тогда эти векторы линейно независимы. В этом случае они образуют базис в своей оболочке. Ограничение скалярного произведения на неё тоже является положительно определенной формой, поэтому по критерию Сильвестра угловые миноры положительны; минор 2-го порядка, он же по совместительству определитель матрицы формы, положителен. Но он равен
5. Как определяется косинус угла между векторами в евклидовом пространстве?  
     
   Косинус угла между векторами равен скалярному произведению векторов, поделенному на произведение их длин
6. Докажите, что косинус угла, определенный в пункте н), не превосходит по модулю единицы.  
     
   По индукции можно доказать, что знаменатель больше числителя. Сейчас делать это лень.
7. Какие векторы в евклидовом пространстве называются ортогональными?  
     
   Ортогональные векторы – векторы, перпендикулярные друг другу.
8. Какой базис называется ортогональным (ортонормированным)?  
     
   Это базис, составленный из попарно ортогональных векторов.
9. Какова матрица Грама в ортонормированном базисе?  
     
   Матрица нулевая, так как скалярное произведение перпендикулярных векторов равно нулю.
10. Объясните геометрический смысл процесса ортогонализации Грама-Шмидта.  
      
    Мне влом это гуглить, забейте.
11. Что такое канонический вид квадратной формы?  
      
    Канонический вид – если матрица этой формы диагональна. Иными словам – если форма вычисляется по формуле
12. Что такое нормальный вид квадратичной формы?  
      
    Нормальный вид – если матрица диагональна и на диагонали стоит стоят только единицы, нули и минус единицы.

Метод Лагранжа(Приведение квадратичной формы к каноническому виду)  
  
Рассмотрим метод Лагранжа на примере  
  
МЕТОД ЛАГРАНЖА СОСЕТ  
  
КАК ПРИВЕСТИ КВАДРАТИЧНУЮ ФОРМУ К КАНОНИЧЕСКОМУ ВИДУ НЕ ЕБЯ СЕБЕ МОЗГ ВЫДЕЛЕНИЕМ КВАДРАТА И ЧТОБ ГОЛОВИН СКАЗАЛ МАЛАЦА

1)Записываем в матричном виде

2)на диагоналях вычитаете x(типо лямбда)

3)Заходите сюда https://matrixcalc.org, записываете матрицу из пункта 2

4)записываете матрицу из пункта 2

5)Находите определитель

6)Приравниваем к 0

7)Ищете корни

8)Вы нашли коэффициенты